Proseminar: Perlen der Informatik II
Aussagenlogik – Korrektheit und Vollständigkeit des natürlichen Schließens

Andreas Kirsch

Stand: 29. April 2008

1 Aussagenlogik

In der Mathematik und natürlich auch in der Informatik muss man sich präzise und differenziert ausdrücken können. Die Art und Weise, wie man argumentert ist wichtig, denn nur, wenn man das formale Handwerkszeug beherrscht, kann man auch korrekt Beweise führen und richtig schlussfolgern.

Auch dieses „formale Handwerkszeug“ muss natürlich auf eine fundierte Basis gestellt werden und das übernimmt das Gebiet der Logik in der Mathematik.

Das grundlegendste Konzept hierbei ist die Aussagenlogik. Sie befasst sich mit Aussagen und dem Herleiten neuer Aussagen. Dabei gibt es, wie man sich wohl denken mag, verschiedene Vorgehensweisen und in dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt beim natürlichen Schließen. Das axiomatische Modell wird hier nicht weiter betrachtet.

1.1 Aussagen

Definition 1 *Eine Aussage kann entweder* wahr *oder* falsch *sein.*

Diese Definition ist bewusst sehr offen gehalten, da es für die Logik an sich egal ist, ob man mit Sätzen, Formeln oder anderen Objekten arbeitet, solange man ihnen einen Wahrheitswert zuweisen kann. Natürlich muss der Begriff noch präziser gefasst werden, um die Frage zu beantworten, wie man Aussagen verknüpfen kann und ein Modell zu definieren, das man formal untersuchen kann.

Schlüsseln wir also den Begriff weiter auf, so müssen wir unterscheiden, dass eine Aussage einerseits *elementar* oder aus anderen Aussagen zusammengesetzt sein kann. Ersteres bezeichnet man als *Elementaraussage*. Elementaraussagen sind zum Beispiel Sätze wie „2000 ist ein Schaltjahr.“ oder „Paris liegt in Frankreich.“, oder auch Formeln wie $\pi = 3$ oder $2 + 2 = 4$.

Der eigentliche Inhalt der Aussagen ist für die Aussagenlogik uninteressant, da man nur mit den Aussagen an sich arbeitet. Deshalb kann man auch mit „abstrakten“ Elementaraussagen $p, q, r, ...$ bzw. $p_1, p_2, ...$ arbeiten, die entweder wahr oder falsch sein können. Zusammengesetzte Aussagen dagegen sind schon interessanter für die Aussagenlogik, da man verschiedene Verknüpfungen benutzen kann, um sie aus Elementaraussagen oder anderen zusammengesetzten Aussagen zu konstruieren.
Sind ϕ, ψ Aussagen, so sind die folgenden Ausdrücke zusammengesetzte Aussagen:

- $\neg\phi$
  Negation von ϕ

- $\phi \vee \psi$
  „ϕ oder ψ“ – Disjunktion von ϕ und ψ.

- $\phi \wedge \psi$
  „ϕ und ψ“ — Konjunktion von ϕ und ψ.

- $\phi \rightarrow \psi$
  „aus ϕ folgt ψ“ — ϕ impliziert ψ. Achtung: Es handelt sich dabei nicht um eine kausale Abhängigkeit, sondern um eine Beziehung, die den Erhalt der Wahrheitswerte beschreibt, im Sinne von „Ist ϕ wahr, dann auch ψ“

Beispiele sind $a \vee b \vee \neg c$ oder $(a \rightarrow b) \rightarrow c \wedge d$.

Zusätzlich soll noch das *Falsum* $\perp$ eingeführt werden. Es steht für eine immer falsche Aussage, also einen Widerspruch, und wird später bei den Inferenzregeln nützlich sein.

1.2 Formale Sprache

Mit diesem Wissen kann man Aussagen präzise rekursiv definieren. Dazu betrachtet man Aussagen als sogenannte „formale Sprache“, die über einem Alphabet definiert ist und bestimmten Regeln entsprechen muss. In unserem Fall handelt es sich bei dem Alphabet um die Menge der Elementaraussagen und der Operatoren. Um Aussagen von Konstrukten abzugrenzen, die zwar nur aus Zeichen dieses Alphabetes bestehen, aber syntaktisch keinen Sinn machen, wollen wir beliebige Wörter über diesem Alphabet als *Ausdrücke* bezeichnen.

Definition 2 *Ein Ausdruck der Aussagenlogik ist ein beliebiges Wort über dem Alphabet der Elementaraussagen* $\{p, q, r, ..., p_1, p_2, ...\}$*, der Menge der Operatoren* $\{\neg, \wedge \vee, \rightarrow\}$ *oder dem Falsum* $\perp$.

Eine Aussage ist dann ein *wohlgeformter* Ausdruck, also einer, der als Aussage „Sinn" macht. Anstatt wohlgeformter Ausdruck sagt man auch Aussagenformel oder kurz Formel. Wir können die Definition der Aussagen, wie folgt präzisieren:

Definition 3 *Eine Aussagenformel der Aussagenlogik wird durch und nur durch die endliche Anwendung der folgenden Regeln konstruiert*[1]*:*

Elementareaussage: *Eine Elementaraussage* $p, q, r, ...,\ p_1, p_2, ...$ *ist eine Aussagenformel.*

Falsum: *Das Falsum* $\perp$ *ist eine Aussagenformel.*

$\neg$: *Ist* ϕ *eine Aussagenformel, dann ist* $(\neg\phi)$ *auch eine.*

$\vee$: *Sind* ϕ *und* ψ *Aussagenformeln, dann ist* $(\phi \vee \psi)$ *auch eine.*

$\wedge$: *Sind* ϕ *und* ψ *Aussagenformeln, dann ist* $(\phi \wedge \psi)$ *auch eine.*

$\rightarrow$: *Sind* ϕ *und* ψ *Aussagenformeln, dann ist* $(\phi \rightarrow \psi)$ *auch eine.*

Die äußeresten Klammern werden normalerweise weggelassen bzw. implizit angenommen.

Der Vorteil dieser Definition ist, dass dadurch genau eingegrenzt wird, was eine Aussagenformel ist, und man einige Schlüsse aus der Definition ziehen kann.

Fakt 1 *Für jede Aussagenformel kann eindeutig die Regel bestimmt werden, die zuletzt angewandt wurde.*

Dies ist sofort einsichtig, da es für jeden Operator nur genau eine Einführungsregel in der obigen Definition gibt.

Fakt 2 *Jede Aussagenformel lässt sich eindeutig in einem Syntaxbaum darstellen.*

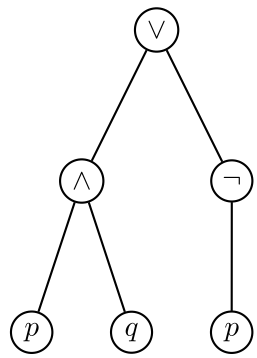
Ein Syntaxbaum einer Aussage ist ein Baum, dessen Blätter Elementaraussagen bezeichnen, und dessen innere Knoten die Operatoren darstellen, die die Kindknoten verknüpfen. Am einfachsten ist es, wenn man sich das an einem Beispiel veranschaulicht. Betrachten wir also die Aussage:

$$(p \wedge q) \vee \neg p$$

Der dazugehörige Syntaxbaum sieht wie folgt aus:

[1] Die Regeln können auch in der Backus-Naur-Form zusammengefasst werden (geläufig im Compilerbau), wobei p für eine beliebige Elementaraussage steht:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \rightarrow \phi$$



Fakt 3 *Die Definition eignet sich für* strukturelle Induktion *beim Beweis von Eigenschaften.*

Strukturelle Induktion ist eine Unterart der Induktion, die sich die rekursive Definition der Aussagenformeln zu Nutze macht und bei der man über die Höhe des Syntaxbaumes induziert.

Definition 4 *Die* Höhe *eines Syntaxbaumes ist* 1 *plus die Länge des längsten Pfades vom Wurzelknoten zu einem Blatt.*

Man erinnert sich, dass die Länge eines Pfades die Anzahl der besuchten Kanten angibt. Diese Länge plus 1 ist gerade die Anzahl der Knoten, die adjazent zu den Kanten des Pfades sind. Beim Beweis einer gewissen Eigenschaft zeigt man dann zuerst als Basisfall der Induktion die Gültigkeit der Eigenschaft für den Fall „die Höhe des Syntaxbaumes ist gleich 0" — in unserem Fall also die Elementaraussagen — und nimmt dann an, dass die Eigenschaft schon für Syntaxbäume der Höhe n bewiesen wurde und beweist die Gültigkeit der Eigenschaft für Syntaxbäume der Höhe $n+1$, indem man eine Fallunterscheidung für alle Kompositionsregeln macht, da ein Syntaxbaum der Höhe $n+1$ nur Teilaussagen der Höhe $\leq n$ enthalten kann.
Mit dieser Methode lassen sich relativ leicht komplexe Eigenschaften beweisen.

1.3 Inferenzregeln und natürliches Schließen

Im Allgemeinen möchte man aus einer Reihe von Prämissen neue Aussagen folgern und dabei sicher sein, dass die gefolgerten Aussagen wahr sind, wenn die Prämissen auch alle wahr sind. Dies versucht man durch eine korrekte Argumentationskette zu erzielen.

Das natürliche Schließen setzt genau hier an und versucht das Schlussfolgern zu formalisieren, indem versucht wird durch das Anwenden von *Inferenzregeln* neue Aussagen aus den Prämissen zu gewinnen.

Definition 5 *Will man ausdrücken, dass man aus einer Folge von Prämissen eine Aussage herleiten kann, schreibt man:*

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$$

Man bezeichnet dies als eine Sequenz. *Sie ist genau dann* herleitbar, *wenn es einen Beweis für die Sequenz gibt — also eine Folge von Aussagen gibt, die mit $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ beginnend in ψ endet und durch Anwendung von Inferenzregeln hergeleitet wurde .*

Es werden folgende Inferenzregeln als gegeben angenommen:

	Introduktion	Elimination
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ {\scriptstyle \wedge i}$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ {\scriptstyle \wedge e_1} \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ {\scriptstyle \wedge e_2}$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ {\scriptstyle \vee i_1} \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ {\scriptstyle \vee i_2}$	$\dfrac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ {\scriptstyle \vee e}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ {\scriptstyle \rightarrow i}$	$\dfrac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ {\scriptstyle \rightarrow e}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ {\scriptstyle \neg i}$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\ {\scriptstyle \neg e}$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\phi}\ {\scriptstyle \bot e}$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ {\scriptstyle \neg\neg e}$

Für die umrahmten Aussagen der Form $\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}$ gilt, dass innerhalb des Blocks die Aussage ϕ als wahr angenommen wird (*temporäre Annahme*).

Als Beispiel soll $\vdash \phi \vee \neg\phi$ bewiesen werden, was auch als Gesetz des ausgeschlossenen Dritten (abgekürzt: „*LEM*“) bekannt ist:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	Annahme
2.	ϕ	Annahme
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 1, 3
5.	$\neg\phi$	$\neg i$ 2–4
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7.	$\perp$	$\neg e$ 1, 6
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1–7
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

1.4 Semantik der Aussagenlogik

Bisher wurden nur die Syntax der Aussagen und die Inferenzregeln, die für den Beweis von Sequenzen nötig sind, betrachtet. Über die Bedeutung (*Semantik*) der Aussageoperatoren wurde noch nichts gesagt. Aussagen und damit auch zusammengesetzte Aussagen haben einen Wahrheitswert (entweder wahr oder falsch) und setzt man eine Aussage aus Teilaussagen mit Hilfe der bekannten Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ zusammen, so stellt sich die Frage, wie der Wahrheitsgehalt der gesamten Aussage von den Wahrheitswerten der Teilaussagen bestimmt wird.

Dazu kurz eine Übersicht der bekannten Wahrheitstafeln für die verschiedenen Operatoren, dabei wird für den Wahrheitswert „wahr“ das Zeichen T benutzt und für „falsch“ F:

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Dabei ist das Falsum $\perp$ mit seiner degenerierten Wahrheitstafel eine Ausnahmeerscheinung:

$\perp$
F

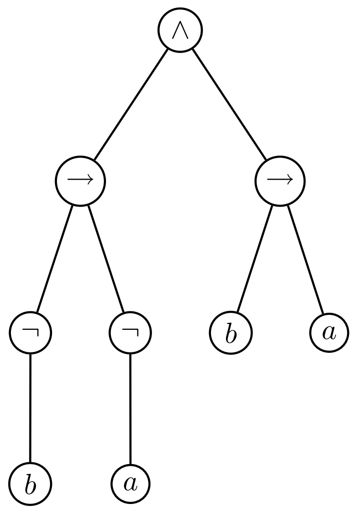
Definition 6 *Eine* Belegung *oder auch ein* Model *einer Aussage ϕ ist eine Zuweisung eine Wahrheitswertes an jede Elementaraussage, die von ϕ verwendet wird.*

Eine vollständige Wahrheitstafel hat also für jede mögliche Belegung einen Eintrag und, wie man sich leicht überlegen kann, hat dementsprechend eine solche Tafel 2^n Einträge, falls die Aussage n Elementaraussagen referenziert.

Fakt 4 *Eine Wahrheitstafel für eine Aussage aus n Elementaraussagen hat 2^n Einträge.*

Komplexe Aussagen lassen sich anhand ihres Syntaxbaumes leicht in Teilaussagen zerlegen, die man in den Wahrheitstafeln aufnimmt, um die „Berechnungen" zu vereinfachen.
Als Beispiel:

$$(\neg b \to \neg a) \wedge (b \to a)$$



a	b	$\neg a$	$\neg a$	$\neg b \to \neg a$	$b \to a$	$(\neg b \to \neg a) \wedge (b \to a)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

Analog zu Sequenzen kann man auch etwas über die Beweisbarkeit von Aussagen mittels Wahrheitstafeln sagen.

Definition 7 *Ist ψ wahr für alle Belegungen, bei denen auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ alle wahr sind, so schreibt man*

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$$

wobei $\models$ als semantische Konsequenz *bezeichnet wird.*

Eine solche Schlussfolgerung lässt sich leicht beweisen, indem man die Wahrheitstafeln aufstellt und alle nötigen Fälle untersucht.

2 Korrektheit und Vollständigkeit des natürlichen Schließens

Während Beweise durch Wahrheitstafeln direkt bei den Wahrheitswerten ansetzen und es dadurch sofort einsichtig ist, dass diese Beweise korrekt sind, ist das beim natürlichen Schließen nicht der Fall. Obwohl alle Regeln intuitiv richtig erscheinen, fehlt noch der Beweis, das natürliche Schließen auch wirklich *korrekt* ist, d.h. ob man bei der Anwendung der Inferenzregeln auch tatsächlich immer wahre Aussagen (in Abhängigkeit von den Prämissen) erhält. Andererseits stellt sich die Frage, ob man mit Hilfe von Inferenzregeln auch alles beweisen kann, was „wahr“ ist (in Abhängigkeit von den Prämissen). Es stellt sich also die Frage nach der Vollständigkeit des natürlichen Schließens.

Formal kann man die Korrektheits- und Vollständigkeitsbedingung wie folgt ausdrücken:

- Das natürliche Schließen ist korrekt, wenn aus jeder herleitbaren Sequenz $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$ folgt, dass auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ gilt.
- Das natürliche Schließen ist vollständig, wenn aus jeder semantischen Konsequenz $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ folgt, dass $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$ herleitbar ist.

2.1 Beweis der Korrektheit

Theorem 1 (Korrektheit) *Seien $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ und ψ Aussagen. Wenn $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$ herleitbar ist, dann gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$.*

Beweis Beweis durch Induktion über die Länge k der Beweise aller Sequenzen $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$. Die Länge eines Beweises definieren wir als die Anzahl der Zeilen, die seine Niederschrift in der „linearen Notation”hat. Die Aussage, die per Induktion bewiesen werden soll, lautet also:

> „Für alle Sequenzen $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$, deren Beweis die Länge k hat, gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$.“

Induktionsanfang ($k = 1$):

Hat der Beweis die Länge 1, so muss es ein Beweis der Form

1.	ϕ	Prämisse

sein, da alle anderen Regeln mindestens eine Vorgängerzeile benötigen. Beweise dieser Art beweisen offenkundig Sequenzen der Form $\phi \vdash \phi$. Es ist klar, dass ϕ T ist, wenn ϕ T ist und damit folgt sofort $\phi \models \phi$, wie gefordert.

Induktionsschritt $(1, ..., k-1 \rightarrow k)$:

Angenommen man hat einen Beweis, der k Zeilen hat, dann hat er folgende Struktur:

1.	ϕ_1	Prämisse
	$\vdots$	
n.	ϕ_n	Prämisse
	$\vdots$	
k.	ψ	*Begründung*

Als einziges interessant ist die letzte Zeile, da für alle anderen Zeilen $< k$ die Korrektheit schon durch die Induktionsannahme gezeigt wurde. Da man nicht wissen kann, welche Inferenzregel als letztes angewandt wurde, ist eine Fallunterscheidung nötig:

$\wedge i$ **:** Handelt es sich bei der letzten Regel um die Introduktion einer Konjunktion, so ist ψ wohl von der Form $\psi_1 \wedge \psi_2$ und die Begründung verweist auf 2 Zeilen k_1, k_2 weiter oben im Beweis, die natürlich $< k$ sind und damit folgt aus der Induktionsannahme, dass sowohl $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1$ als auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_2$ gilt, da die Zeilen 1–k_1 bzw. 1–k_2 die Beweise für diese Aussagen herleiten. Somit ist gewiss, dass für alle Belegungen von $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$, bei denen alle ϕ_i wahr sind, sowohl ψ_1 als auch ψ_2 wahr sind. Ein Blick auf die Wahrheitstafel des Konjunktions-Operators genügt um zu sehen, dass in diesem Fall auch $\psi_1 \wedge \psi_2$ wahr ist und dann natürlich auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \wedge \psi_2$ gilt.

$\wedge e_{1/2}$ **:** Die letzte Zeile hat also die Form $\psi_{1/2}$ und sie verweist auf eine Zeile $< k$ der Form $\psi_1 \wedge \psi_2$, für die ebenso aus der Induktionsannahme folgt: $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \wedge \psi_2$. Aus der Wahrheitstafel ist ersichtlich, dass $\psi_1 \wedge \psi_2$ nur wahr ist, wenn sowohl ψ_1 als auch ψ_2 wahr ist. Also folgt sofort: $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_{1/2}$.

$\vee i_{1/2}$ **:** Analog folgert man für eine letzte Zeile der Form $\psi_1 \vee \psi_2$ mit der Wahrheitstafel, dass, wenn $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_{1/2}$ gilt, auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \vee \psi_2$ gilt.

$\neg\neg e$ **:** Die letzte Zeilte ist ψ und sie verweist auf eine Zeile $< k$ der Form $\neg\neg\psi$. Stellen wir die Wahrheitstabelle auf, so ist einsichtig, dass $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ aus $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \neg\neg\psi$ folgt.

ψ	$\neg\psi$	$\neg\neg\psi$
T	F	T
F	T	F

$\rightarrow e$: Analog zu den vorhergehenden Fällen: Die letzte Zeile lautet ϕ_2 und verweist auf 2 Zeilen ψ_1 und $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, für die wegen der Induktionsannahme gilt: $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1$ bzw. $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Da ψ_1 wahr ist und die Implikation für diesen Fall nur wahr sein kann, wenn auch ψ_2 wahr ist, folgt $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_2$.

$\rightarrow i$: Die letzte Zeile hat also die Form $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ und die Begründung verweist auf einen ganzen Annahmeblock in den Zeilen k_1 bis k_2. Man kann aber schlecht die Zeilen $1 - k_2$ als einen Beweis ansehen, da die Zeile k_2 sich innerhalb des Blocks befindet und somit eine Annahme macht, die durch keine Prämisse beweisbar ist (zumindest in diesem Beweis). Das heißt, das Entfernen der letzen Zeilen lässt den Beweis in dieser Form ungültig werden. Man löst dieses Problem dadurch, dass man den Block auflöst und seine Annahme in eine Prämisse umwandelt.
Es gibt also einen Beweis für $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_\mathbf{1} \vdash \psi_2$, der $k_2 < k$ Zeilen lang ist und somit folgt: $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_1 \models \psi_2$. Daraus folgt unmittelbar $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Dazu bemerkt man, dass eine Implikation nur dann falsch sein kann, wenn ihre Prämisse wahr, aber die Konklusion falsch ist. Dieser Fall wurde aber gerade durch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_1 \models \psi_2$ ausgeschlossen und somit ist $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ immer wahr (wenn die Prämissen $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ wahr sind).

$\vee e$: Es steht χ in der letzten Zeile und die Begründung verweist auf eine Zeile $\phi_1 \vee \phi_2$ und zwei Annahmeblöcke, aus denen man analog zu den anderen Fällen $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi_1 \vee \psi_2$, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_1 \models \chi$ und $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi_2 \models \chi$ folgern kann. Aus den Wahrheitstafeln wird ersichtlich, dass dann auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \chi$ gilt.

$\neg i$: Die letzte Zeile lautet $\neg\psi$ und die Begründung verweist auf einen Annahmeblock mit der Annahme ψ und letzten Zeile $\perp$. Wie oben, kann man analog aus $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi \vdash \perp$ schließen, dass $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi \models \perp$ gilt. Nach der Definition der semantischen Konsequenz kann es keine Belegung geben in der alle $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi$ wahr sind, weil $\perp$ nie wahr ist. Daraus folgt sofort $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \neg\psi$, denn wenn $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ alle wahr sind, muss ψ falsch sein.

$\perp e$: ψ ist eine beliebige Aussage und die Begründung verweist auf eine Zeile mit Zeilennummer $< k$, die $\perp$ enthält. Es gibt also einen Beweis für die Sequenz $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \perp$ mit Länge $< k$ und wegen Induktionsannahme gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \bot$. Da aber $\bot$ nie wahr ist, kann es wegen der Definition von $\models$ keine Belegung geben in der alle $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ wahr sind (genau wie im Fall $\neg i$). Dann gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$, da jede Belegung die alle $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ wahr macht – es gibt ja keine –, auch ψ wahr macht.

$\neg e$ **:** In der letzten Zeile steht also $\bot$ und die Begründung referenziert zwei Zeilen k_1 und k_2 der Form ψ und $\neg\psi$. Da beide Zeilennummern $< k$ sind, folgt aus der Induktionsannahme: $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ und $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \neg\psi$. Das bedeutet, dass jede Belegung, die ψ wahr macht, auch $\neg\psi$ wahr werden lässt. Aber ein Blick auf die Wahrheitstafel von $\neg$ zeigt, dass es keine solche Belegung geben kann. Es gibt folglich auch keine Belegung, die alle $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ wahr macht und dann gilt trivialerweise auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \bot$.

Damit sind alle Fälle behandelt und die Korrektheit ist bewiesen.

□

2.2 Beweis der Vollständigkeit

Theorem 2 (Vollständigkeit) *Gilt $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ für beliebige Aussagen $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \psi$, dann gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$.*

Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass man für jede semantische Konsequenz einen entsprechenden Beweis mittels Inferenzregeln konstruieren kann. Dieser Beweis wird in 3 Einzelschritten geführt werden, wobei der zweite Schritt der aufwendigste sein wird:

Schritt 1: Aus $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$, folgt: $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$

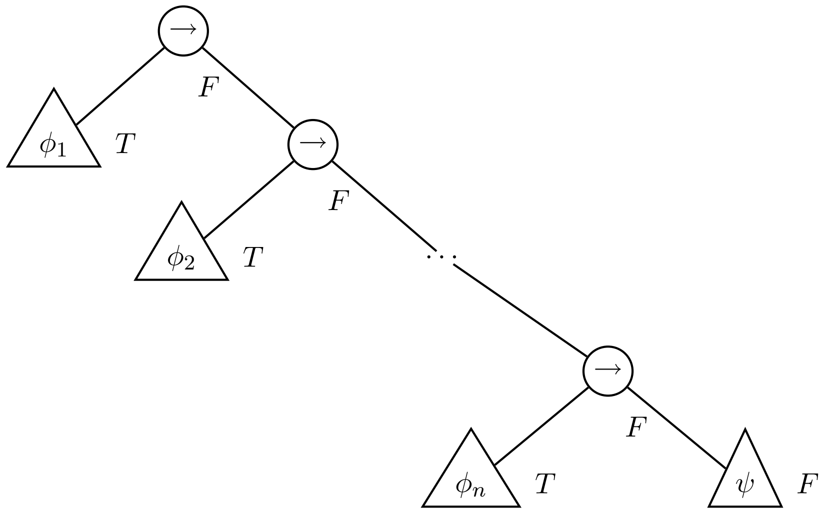
Schritt 2: Aus dem wiederum folgt: $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$

Schritt 3: Dann gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$

Beweis

Schritt 1: Aus $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$, folgt: $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$

Beweis durch Kontradiktion: $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$ gilt nicht, dann bedeutet dies, das die Implikation falsch ist. Das kann aber nur passieren, wenn die Prämissen alle wahr und ψ falsch ist, da es sich um geschachtelte Implikationen handelt. Das bedeutet, dass auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ falsch ist, da es offensichtlich eine Belegung gibt, bei der die Prämissen wahr sind, aber die Schlussfolgerung falsch ist.



Schritt 2: Aus dem wiederum folgt: $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$

Um diesen Schritt zu zeigen, muss man zuerst ein anderes Theorem beweisen:

Theorem 3 *Sei ϕ eine Aussagenformel, so dass $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alle ihre Elementaraussagen sind. Sei l eine beliebige Zeilennummer in der Wahrheitstafel von ϕ. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $\hat{p}_i$ gleich p_i, falls der Eintrag in der l-ten Zeile für p_i T ist, sonst sei $\hat{p}_i$ gleich $\neg p_i$. Dann gilt*

1. *$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi$ ist herleitbar, wenn der Eintrag für ϕ in der Zeile l T ist*
2. *$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi$ ist herleitbar, wenn der Eintrag für ϕ in der Zeile l F ist.*

Beweis Beweis durch strukturelle Induktion über die Höhe des Syntaxbaumes von ϕ:

Basisfall:

- Ist ϕ eine Elementaraussage p, dann folgt die zu beweisende Aussage sofort, da $p \vdash p$ und $\neg p \vdash \neg p$ gelten.
- Steht in ϕ das Falsum $\bot$, dann gilt ohnehin $\vdash \neg\bot$, weil das Falsum immer falsch ist.

Induktionsschritt:

Ist ϕ eine Negation $\neg\phi_1$, dann müssen zwei Fälle betrachtet werden. Es ist klar, dass ϕ und ϕ_1 die gleichen Elementaraussaugen enthalten. Ist nun ϕ T, dann ist ϕ_1 F. Aus der Induktionsannahme folgt dann $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\phi_1$. $\neg\phi_1$ ist gerade ϕ, also $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi$. Ist ϕ nun andererseits F, dann ist

ϕ_1 T. Analog folgt dann $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_n \vdash \phi_1$, und das ist nichts anderes als $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_n \vdash \neg\neg\phi_1$ und $\neg\neg\phi_1$ ist eben $\neg\phi$.

In den anderen Fällen besteht ϕ aus zwei Teilaussagen ϕ_1 und ϕ_2. Sind $q_1, q_2, ..., q_l$ die Elementaraussagen von ϕ_1 und $r_1, r_2, ..., r_k$ die von ϕ_2, dann gilt sicherlich $\{q_1, q_2, ..., q_k\} \cup \{r_1, r_2, ..., r_k\} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Immer wenn $\hat{q}_1, \hat{q}_2, ..., \hat{q}_l \vdash \psi_1$ und $\hat{r}_1, \hat{r}_2, ..., \hat{r}_k \vdash \psi_2$ herleitbar sind, dann nach der $\wedge i$-Regel auch $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{q}_l \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$. Für die Wahrheitswerte von ψ_1 und ψ_2 gibt es zusammen vier Möglichkeiten, wie man sich leicht denken mag:

ϕ_1	ϕ_2	$\hat{q}_1, \hat{q}_2, ..., \hat{q}_l \vdash$	$\hat{r}_1, \hat{r}_2, ..., \hat{r}_k \vdash$	$\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{q}_l \vdash$
T	T	ϕ_1	ϕ_2	$\phi_1 \wedge \phi_2$
T	F	ϕ_1	$\neg\phi_2$	$\phi_1 \wedge \neg\phi_2$
F	T	$\neg\phi_1$	ϕ_2	$\neg\phi_1 \wedge \phi_2$
F	F	$\neg\phi_1$	$\neg\phi_2$	$\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$

Jetzt muss man für jeden Fall und Operator den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage bestimmen und zeigen, dass aus dem $\psi_1 \wedge \psi_2$-Part, die jeweilige Aussage, also entweder ϕ oder $\neg\phi$ abhängig vom bestimmten Wahrheitswert folgt.

$\phi : \phi_1 \wedge \phi_2$:

- Der Fall TT ist trivial: $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$.
- TF muss bewiesen werden: $\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$.

1.	$\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	Prämisse
2.	$\phi_1 \wedge \phi_2$	Annahme
3.	ϕ_2	$\wedge e_2$ 2
4.	$\perp$	$\neg e$ 3, 1
5.	$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$	$\neg i$ 2–4

- Die anderen beiden Fälle folgen analog aus dem zweiten.

$\phi : \phi_1 \vee \phi_2$:

- Die Fälle TT, TF, FT können alle nach dem gleichen Schema bewiesen werden, deswegen werde hier nur der Fall TF explizit bewiesen:

$$\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2$$

1.	$\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	Prämisse
2.	ϕ_1	$\wedge e_1 1$
3.	$\phi_1 \vee \phi_2$	$\vee i_1$ 2

- Der Fall FF ist auch nicht schwer: $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2)$. Das ist gerade eine der beiden De-Morgan-Regeln:

1.	$\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	Prämisse
2.	$\neg\phi_1$	$\wedge e_1$ 1
3.	$\neg\phi_2$	$\wedge e_2$ 1
4.	$\phi_1 \vee \phi_2$	Annahme
5.	ϕ_1	Annahme
6.	$\perp$	$\neg e$ 2, 5
7.	ϕ_2	Annahme
8.	$\perp$	$\neg e$ 3, 7
9.	$\perp$	$\vee e$ 4, 5–6, 7–8
10.	$\neg(\phi_1 \vee \phi_2)$	$\neg i$ 4–9

$\phi : \phi_1 \rightarrow \phi_2$**:**

- Der Fall TT wird bewiesen: $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$

1.	$\phi_1 \wedge \phi_2$	Prämisse
2.	ϕ_1	Annahme
3.	ϕ_2	$\wedge e_2$ 1
4.	$\phi_1 \rightarrow \phi_2$	$\rightarrow i$ 2–3

- Für den Fall TF muss man zeigen: $\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$

1.	$\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	Prämisse
2.	ϕ_1	$\wedge e_1$ 1
3.	$\neg\phi_2$	$\wedge e_2$ 1
4.	$\phi_1 \rightarrow \phi_2$	Annahme
5.	ϕ_2	$\rightarrow e$ 2, 4
6.	$\perp$	$\neg e$ 3, 5
7.	$\neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$	$\neg i$ 4–6

- Die Fälle FT und FF sind bis auf die Prämisse gleich, deshalb soll an dieser Stelle nur der Fall FF explizit bewiesen werden, da der andere dazu analog ist: $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$

1.	$\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$	Prämisse
2.	$\neg\phi_1$	$\wedge e_1$ 1
3.	ϕ_1	Annahme
4.	$\perp$	$\neg e$ 2, 3
5.	ϕ_2	$\perp e$ 4
6.	$\phi_1 \rightarrow \phi_2$	$\rightarrow i$ 3–5

Damit sind alle Fälle bewiesen und somit auch der Induktionschritt. □

Korollar 1 *Wenn* $\models \eta$*, dann auch* $\vdash \eta$*.*

Beweis Sei n die Anzahl der unterschiedlichen Elementaraussagen $p_1, p_2, ..., p_n$, die η enthält. Dann enthält die Wahrheitstafel von η 2^n Einträge (siehe Fakt 4). Da es keine Prämissen gibt, muss die Konklusion wegen der semantischen Konsequenz immer wahr sein. η ist also T in allen 2^n Einträgen.
Mit Hilfe des *LEM* und des gerade bewiesenem Theorems kann man nun einen Beweis für $\vdash \eta$ konsturieren. Für alle Belegungen der Elementaraussagen gilt nach dem Theorem:

$$\begin{aligned} p_1, p_2, ..., p_n &\vdash \eta && (1)\\ \neg p_1, p_2, ..., p_n &\vdash \eta && (2)\\ p_1, \neg p_2, ..., p_n &\vdash \eta && (3)\\ \neg p_1, \neg p_2, ..., p_n &\vdash \eta && (4)\\ &\vdots && (5)\\ \neg p_1, \neg p_2, ..., \neg p_n &\vdash \eta && (6)\\ & && (7) \end{aligned}$$

Man kann nun mit folgendem Verfahren die Anzahl der Prämissen in jedem Durchlauf um eins verringern:

> Man betrachte alle möglichen Belegungen der Elementaraussagen $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ nacheinander. Mit $\hat{p}_i$ sei entweder p_i oder $\neg p_i$ bezeichnet, je nachdem ob p_i in der Belegung T ist oder nicht. Dann gibt es nach dem Theorem 3 Beweise für:
>
> $$\begin{aligned} \hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_{n-1}, p_n &\vdash \eta && (8)\\ \hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_{n-1}, \neg p_n &\vdash \eta && (9)\\ & && (10) \end{aligned}$$
>
> und man kann folgenden Beweis für $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_{n-1} \vdash \eta$ konstruieren:

1.	$\hat{p}_1$	Prämisse
2.	$\hat{p}_2$	Prämisse
	$\vdots$	
4.	$\hat{p}_{n-1}$	Prämisse
5.	$p_n \vee \neg p_n$	LEM
6.	p_n	Annahme
$\vdots$	Beweis für $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_{n-1}, p_n \vdash \eta$	
8.	η	
9.	$\neg p_n$	Annahme
$\vdots$	Beweis für $\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_{n-1}, \neg p_n \vdash \eta$	
11.	η	
12.	η	$\vee e$ 5, 9–11

Es ist unmittelbar einsichtig, dass dann nach n Schritten $\vdash \eta$ bewiesen ist. Wird dieses Korollar nun auf $\models \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$ angewandt, so erhält man $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$ und der zweite Schritt ist damit auch bewiesen. □

Schritt 3: Dann gilt auch $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$

Korollar 2 *Aus* $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$ *folgt* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$.

Beweis Dazu konstruiert man einen Beweis wie folgt:

> Man fügt an den Anfang des Beweises für $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$ $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ als Prämissen ein und wendet am Schluss wiederholt die $\rightarrow e$-Regel an um nacheinander alle Implikationen aufzulösen:

1.	ϕ_1	Prämisse
2.	ϕ_2	Prämisse
	$\vdots$	
n.	ϕ_n	Prämisse
	Beweis für $\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...))$	
$k+1$.	$\phi_2 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...)$	$\rightarrow e$ 1
$k+2$.	$\phi_3 \rightarrow (... (\phi_n \rightarrow \psi) ...)$	$\rightarrow e$ 2
	$\vdots$	
$k+n$.	ψ	$\rightarrow e$ n.

□

Damit wurde in drei Schritten die Umwandlung einer beliebigen semantischen Konsequenz in einen durch Inferenzregeln hergeleiteten Beweis vollzogen und wir sind fertig.

□

3 Zusammenfassung

Damit sind sowohl Vollständigkeit und Korrektheit des natürlichen Schließens bewiesen und man kann beides zusammenfassen:

Korollar 3 (Vollständigkeit und Korrektheit) *Seien* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *und* ψ *beliebige Aussagen.* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$ *ist genau dann herleitbar, wenn* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ *gilt.*

Wahrheitstafeln und Inferenzregeln sind also gleich mächtige Werkzeuge zum Beweisen von Aussagen (zumindest in der Aussagenlogik) und man kann beliebig zwischen ihnen wählen.

Literatur

[1] Micheal Huth and Mark Ryan. *Logic in Computer Science.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, second edition, 2004.